

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la dérivée de f .
2. Après avoir développer f par la formule du binôme ; donner une autre expression de cette dérivée.
3. En déduire la valeur des sommes suivantes :

a. $\sum_{p=1}^n pC_n^p = 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$

b. $\sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} pC_n^p = 1C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n$

Exercice 2.

1. f est une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Rappeler le théorème de Rolle pour f .
2. Montrer que si f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b) = f(c)$, alors il existe $\beta \in]a, b[$ tel que $f''(\beta) = 0$.
3. On considère $g(x) = x^6 - 9x^4 + 10x^3 - 2x^5 - 26x^2 + 2x + 28$ et $h(x) = 30x^4 - 108x^2 + 60x - 40x^3 - 52$.
 - a. Calculer $g(-3)$, $g(1)$ et $g(4)$.
 - b. En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(x_0) = 0$.
 - c. En déduire qu'il existe $x_1 \neq x_0$ tel que $h(x_1) = 0$.

Exercice 3.

Montrer que si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, alors f a un point fixe dans $]0, 1[$ (c'est-à-dire qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $f(\beta) = \beta$).

Exercice 4.

Soit P la fonction polynôme réelle définie par

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

On suppose que les coefficients de P satisfont la relation

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

En considérant une primitive de P , montrer que P admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 5.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{et} \quad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

sont monotones.

3. Déterminer les limites en l'infini de $\ln f$ et $\ln g$, puis de f et g .

Exercice 6.

1. Rappeler la formule de Leibniz pour la dérivée n -ième du produit de deux fonctions f et g .
2. En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose qu'il existe $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ tels que $f(x_i) = 0$ pour tout i . Soit également $a \in [x_1, x_n]$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que

$$f(a) = (a - x_1) \dots (a - x_n) \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

Exercice 8.

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.
2. En déduire que si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.
3. Application : Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 9.

1. Calculer la dérivée n -ième de $f(x) = (x^3 + 2x - 7)e^x$, pour $n \geq 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $x^n e^{1/x}$ est $\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$.
3. Soit $a + ib$ une racine n -ième de l'unité, et $f(x) = e^{ax} \cos(bx)$. Donner une formule simple de $f^{(n)}$.

Exercice 10 (Théorème du point fixe).

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f'(x)| \leq k$. On dit que $\gamma \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(\gamma) = \gamma$.

1. Démontrer que f admet un point fixe.
2. Démontrer que ce point fixe est unique. On le note γ .
3. Soit (u_n) une suite récurrente définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que (u_n) converge vers γ .